


$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \dots & m_{d'd} \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(M) = \dim \text{Vect}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{d'1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{d'2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{1d} \\ m_{d'd} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{d'1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{d'2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{1d} \\ m_{d'd} \end{pmatrix} \right\} \subset \text{Col}_{d'}^{d'}(K)$$

On cherche combien de ces vecteurs
sont linéairement indépendants.

Exemple: Si $d=2$ ils sont lin dep
si il existe
 $(x, y) \neq (0, 0) \text{ tq}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{d'1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{d'2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$x \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{d'1} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{d'2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si $x m_{11} + y m_{12} = 0$
 $\vdots$
 $x m_{d'1} + y m_{d'2} = 0$ | si $x=0$ on a que

$$\begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{d'1} \end{pmatrix} = \frac{y}{x} \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{d'2} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas liés
la plupart du
temps

sont si $\text{Car } K=2 \Leftrightarrow 2_K = 0_K$

$$3 = 2 + 1 = 1$$

on cherche $x, y \in K$ tq

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x + y \\ 3x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 3x - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x = 0 \end{cases}$$

Si $2 \neq 0_K$ on peut diviser par 2
(Car $K \neq 2$)

$$\begin{cases} y = -x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{les vecteurs sont libres}$$

Si $2 = 0_K$ le système devient

$$\begin{cases} y = -x \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \end{cases} \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour tout x

Pour calculer le rang on doit
étudier les solutions $(x_1, \dots, x_d) \in K^d$
de l'équation

$$x_1 \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{d'1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} m_{12} \\ \vdots \\ m_{d'2} \end{pmatrix} + \dots + x_d \begin{pmatrix} m_{1d} \\ \vdots \\ m_{d'd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut interpreter le systeme de la maniere suivante: on considere l'application $\varphi: K^d \rightarrow \text{Col}_{d||}(K)$

$$(x_1, \dots, x_d) \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_d) = x_1 \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{d'1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} m_{12} \\ \vdots \\ m_{d'2} \end{pmatrix} + \dots + x_d \begin{pmatrix} m_{1d} \\ \vdots \\ m_{d'd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 m_{11} + x_2 m_{12} + \dots + x_d m_{1d} \\ \vdots \\ x_1 m_{d'1} + \dots + x_d m_{d'd} \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(M) = \dim \text{Im}(\varphi)$. Pour calculer le rang on peut aussi calculer $\dim \text{Ker } \varphi$ et appliquer NI : $\text{rg}(M) = \text{rg}(\varphi) = d - \dim \text{Ker } \varphi$

On doit résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{pmatrix} x_1 m_{11} + x_2 m_{12} + \dots + x_d m_{1d} \\ \vdots \\ x_1 m_{d1} + \dots + x_d m_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 m_{11} + \dots + x_d m_{1d} = 0 \\ \vdots \\ x_1 m_{d1} + \dots + x_d m_{dd} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi: & \overset{B}{V} & \xrightarrow{\quad} \overset{B'}{W} \\ & v & \longrightarrow \varphi(v) \end{array}$$

$$M = \text{mat}_{B'B}(\varphi) \in M_{d' \times d}(K)$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*: & W^* & \xrightarrow{\quad} V^* \\ \downarrow & \ell' & \longrightarrow \ell'^T(\varphi): v \mapsto \ell'(\varphi(v)) \end{array}$$

$$M^* = \text{mat}_{B^*B'^*}(\varphi^*) = {}^t M \in M_{d \times d'}(K)$$

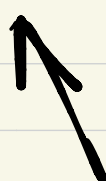
$$\text{Ex: } M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$${}^t M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{ij}: \underset{d \cup B}{V} \longrightarrow \underset{d' \cup B'}{W}$$

$$B = \{e_1, \dots, e_d\} \quad B' = \{f_1, \dots, f_{d'}\}$$

$$\begin{matrix} i \leq d' \\ j \leq d \end{matrix} \quad \Sigma_{ij}(v) := e_i(v) \cdot f_j$$



 ieme coord de v
 ds la base $\{e_1, \dots, e_d\}$

$$\text{mat}_{B'B}(\varepsilon_{ij}) = E_{ij} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Cas } \varepsilon_{ij}: \text{ si } V = K^d \quad W = K^{d'}$$

$$B = B_{\mathbf{e}_j} \text{ base canonique} \quad B' = B_{\mathbf{f}_i}$$

$$\mathbf{e}_j = (\underbrace{0, \dots, 1, 0, \dots, 0}_j)$$

$$\mathbf{f}_i = (\underbrace{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_i)$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij}(x_1, \dots, x_d) &= e_j^*(x_1, \dots, x_d) \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\substack{\text{1 at } i\text{-th position}}} \\
 &= x_j (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\
 &= \underbrace{(0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0)}_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij}(e_d) &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\
 &= \delta_{ji}
 \end{aligned}$$

$$E_{ij} \times E_{j'k} = \delta_{d=j'} E_{ik}$$

Pour le montrer: soit le calcul matriciel

soit dire que $E_{ij} \times E_{j'k}$ est la matrice qui représente la composée

$$E_{ij} \circ E_{j'k} = \delta_{d=j'} \cdot E_{ik}$$

$$M \in M_d(K) \quad M = (m_{ij})_{i,j \leq d}$$

$$\text{tr}(M) := \sum_{i=1}^d m_{ii}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{d1} & m_{d2} & \dots & m_{dd} \end{pmatrix}$$

Alternativement on
défini sur $\text{End } V$

une trace $\text{tr}: \text{End } V \rightarrow K$

$$\varphi \mapsto \text{tr}(\varphi)$$

$$\text{tg } \text{tr}(\varphi) = \text{tr}(\text{mat}_B \varphi)$$